Les fonctions exponentielles

Définitions et théorèmes :

Par définition, La fonction exponentielle est bijection réciproque de la fonction ln.

On la note exp. Pour tout x réel, $\exp(x)=e^x$

Règles de calculs :

$e^0=1$ $\quad e^{x+y}=e^x\times e^y$ $\quad e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ $\quad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$ $\quad (e^x)^n=e^{nx}$

Étude et représentation graphique de la fonction exponentielle :

a) Sens de variation :

La fonction exponentielle est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)=\exp'(x)$ d'où $\exp'(x)>0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante.

On dit que la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

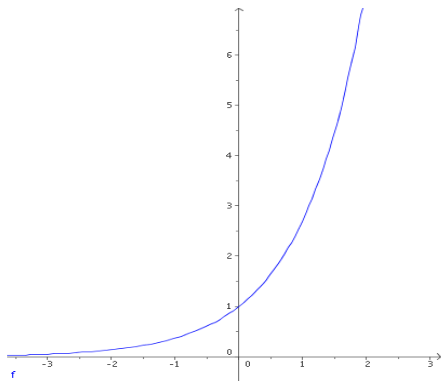
Conséquences :

$e^x=e^y\Leftrightarrow x=y$; $e^x>e^y\Leftrightarrow x>y$; $x\in]-\infty;0[\ \Leftrightarrow\ 0<e^x<1$; $x\in]0;+\infty[\ \Leftrightarrow\ e^x>1$

b) Limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$



c) Autres limites importantes :

$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty}$ donc en particulier pour $n=1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0}$ donc en particulier pour $n=1$: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1}$

Les fonctions exponentielles

Fonctions exponentielles de base a (a > 0) :

a) Définition :

On appelle fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+^*$) la fonction qui se note $x \to \exp_a(x)$ ou $x \to a^x$. $a^x = e^{x \ln(a)}$

Par conséquence : $\forall b \in \mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$

$$a^b = e^{b \ln(a)}$$

$$\Leftrightarrow \ln(a^b) = b \ln(a)$$

b) Étude de variation :

Soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = \ln(a) \cdot e^{x \ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x \ln(a)} > 0$ donc $f_a'(x)$ est du signe de $\ln(a)$.

Donc 3 cas possibles :

Si a = 1 : f_a est la fonction $x \to 1$.

Si a > 1 :

$\ln(a) > 0$ donc :

$f_a' > 0$ et donc la fonction f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

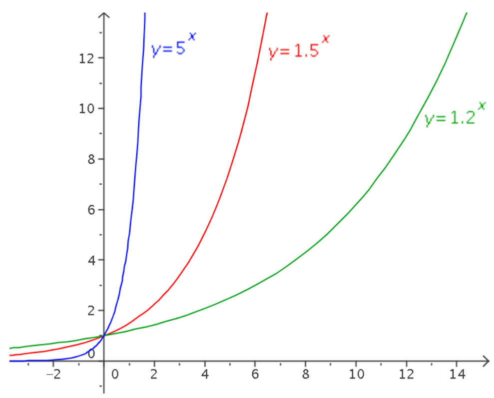
$\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(a) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln(a) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln(a)} = 0$

On en déduit donc ce tableau de variation :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_a'(x)$				$+$			
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

Exemples :



Les fonctions exponentielles

Si 0 < a < 1 :

$\ln(a)<0$ donc :

$f'_a<0$ et donc la fonction f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

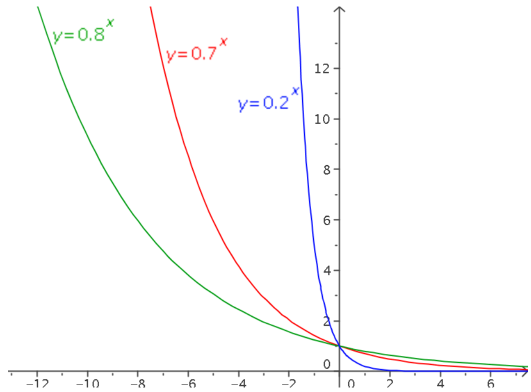
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(a)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(a)}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(a)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln(a)}=+\infty$

On en déduit donc ce tableau de variation :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_a(x)$		$+$		
$f_a(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	a ↘	0

Exemples :



Remarque : Les courbes représentatives des fonctions $x\mapsto a^x$ et $x\mapsto\left(\frac{1}{a}\right)^x$ avec $a>0$ sont symétriques d'axe la droite d'équation $x=0$. En effet, $a^x=e^{x\ln(a)}$ et $\left(\frac{1}{a}\right)^x=e^{x\ln\left(\frac{1}{a}\right)}=e^{-x\ln(a)}$.

c) Primitives :

Les fonctions $x\mapsto a^x$ admettent pour primitives les fonctions $x\mapsto\frac{1}{\ln(a)}a^x+C$ avec C une constante réelle, $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$. (Si a=1 alors les primitives sont les fonctions $x\mapsto x+C$)

d) Règles de calcul :

Les règles de calcul sont les même qu'avec la fonction exponentielle qui n'est en fait qu'un cas particulier : (a et b sont des réels strictement positifs)

Les fonctions exponentielles

$a^0=1$ $\qquad a^{x+y}=a^x\times a^y$ $\qquad a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$ $\qquad a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$ $\qquad (a^x)^n=a^{nx}$ $\qquad \dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$ $\qquad (ab)^x=a^x b^x$

Fonctions puissance :

a) Définition :

On appelle fonction puissance toute fonction f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha=x^\alpha=e^{\alpha\ln(x)}$.

b) Étude de variation :

f_α est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f_\alpha(x)=(\alpha\ln(x))'x^\alpha=\dfrac{\alpha}{x}x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}$.

Sens de variation :

Si $\alpha>0$ alors $f'_\alpha(x)>0$ et donc f_α est strictement croissante.
Si $\alpha<0$ alors $f'_\alpha(x)<0$ et donc f_α est strictement décroissante.

Limites :

Si $\alpha>0$:
$\lim\limits_{x\to0}\alpha\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0}x^a=0$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x^a=+\infty$

Si $\alpha<0$:
$\lim\limits_{x\to0}\alpha\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0}x^a=+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x^a=0$

Tableaux de variations :

$\alpha>0$:

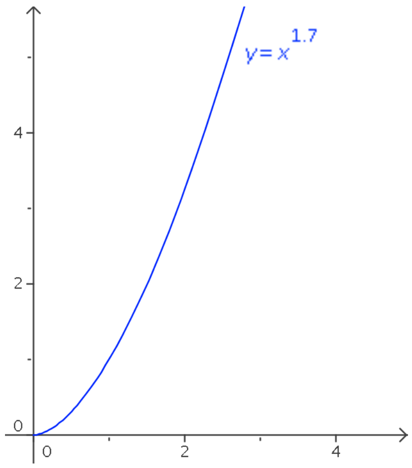
x	0		$+\infty$
x^α	0	$\nearrow$	$+\infty$

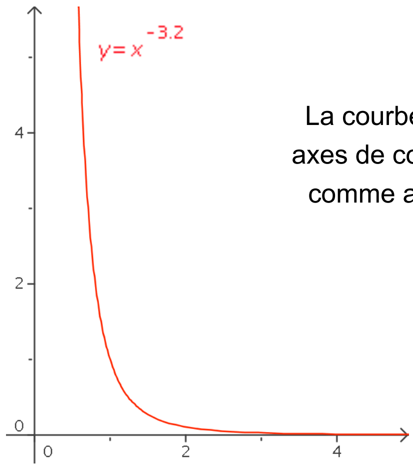
$\alpha<0$:

x	0		$+\infty$
x^α	$+\infty$	$\searrow$	0

Les fonctions exponentielles

Représentation graphique :





La courbe admet les axes de coordonnées comme asymptotes.